Mathematik Klasse 10	Stochastik **Übungsaufgaben zur Wiederholung**	**2**

Hinweis: Die *kursiv*- und **fett**gedruckten Begriffe sind Fachbegriffe, die du beherrschen musst. Wiederhole diejenigen, mit denen du nicht mehr sicher umgehen kannst.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Gib die ***Ergebnismenge Ω*** aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments an!

- Einmaliges Werfen einer Münze $\Omega = \{$
- Ziehen eines von 8 Losen mit den Nummern 1 bis 8 aus einer Lostrommel $\Omega = \{$
- Einmaliges Würfeln $\Omega = \{$
- Zweimaliges Werfen einer Münze $\Omega = \{$

2. Bestimme die ***Wahrscheinlichkeit P***, mit der man aus einem Skatblatt ein schwarzes Ass zieht!

3. Nenne für folgende ***Ereignisse E*** die entgegengesetzten Ereignisse / ***Gegenereignisse*** $\overline{E}$!

A: In einer Familie mit 5 Kindern gibt es mindestens 3 Mädchen.
$\overline{A}$: ....

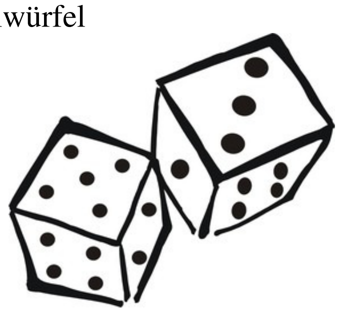
B: Bei 3 Schüssen auf eine Zielscheibe werden 3 Treffer erzielt.
$\overline{B}$: ....

C: Das Eis kostest weniger als 4 €, aber mehr als 2 €.
$\overline{C}$ ....

D: Nadine hat einen Bruder.
$\overline{D}$: ....

E: Ich gewinne immer dieses Spiel.
$\overline{E}$: ....

4. ***Einstufiges Experiment*** und ***LAPLACE-Experiment:***
Bestimme die Wahrscheinlichkeit P, mit einem normalen Spielwürfel
a) eine 3
b) eine 4 oder 5
c) eine gerade Zahl oder eine Primzahl
d) eine Zahl, die durch 2 und 3 teilbar ist
e) eine Zahl, die größer als 3 und kleiner als 4 ist
f) eine Zahl, die kleiner 4 oder gleich 6 ist
zu würfeln!



5. ***Mehrstufiges Experiment (→ Pfadregeln):*** Bestimme die Wahrscheinlichkeit P folgender Ereignisse beim Werfen zweier verschiedenfarbiger Würfel! Zeichne zunächst ein ***Baumdiagramm*** für dieses Experiment!

A: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl an.
B: Die Augenzahl des zweiten Würfels teilt die des ersten
C: Die Augensumme ist eine Primzahl.
D: Der erste Würfel zeigt eine durch 4 teilbare und der zweite eine gerade Zahl.

6. In einer Urne liegen 4 gelbe, 5 rote und 1 weiße Kugel. Es wird zweimal hintereinander eine Kugel gezogen ohne diese wieder zurückzulegen (***Ziehen ohne Zurücklegen***).

a) Zeichne das Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten!
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit P für
A: beide Kugeln sind gleichfarbig.
B: Die erste Kugel ist rot und die zweite gelb.
C: Zuerst wird eine rote oder gelbe Kugel gezogen und dann eine weiße.

7. Julia, Petra, Claudia und Anja machen Campingurlaub. Am ersten Tag losen sie aus, welche zwei Mädchen das Zelt aufbauen müssen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anja das Zelt aufbauen muss?

Statistik

8. 400 Willkürlich ausgewählte Erwachsene wurden befragt, wie viele Stunden sie durchschnittlich nachts schlafen. Man erhielt:

Schlafdauer in Stunden	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Erwachsenen	22	62	100	150	42	24

a) Bestimme die ***absoluten Häufigkeiten*** H_n!
b) Berechne die ***relative Häufigkeiten*** h_n!
c) Zeichne ein ***Säulendiagramm***!
d) Welche Schlafdauer kommt bei Erwachsenen am häufigsten vor? Stelle eine Vermutung dazu auf, was der Vergleich dieses Wertes (***Modalwert***) mit dem ***arithmetische Mittel*** ergibt!
e) Berechne den ***Mittelwert*** und die ***mittlere Abweichung*** vom Mittelwert!

9. Die Anzahl der Kunden an einem Postschalter betrug in 20 aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten von je zehn Minuten:
9; 6; 7; 4; 6; 6; 5; 4; 5; 0; 3; 9; 7; 6; 5; 4; 5; 6; 6; 7.
Bestimme den ***Zentralwert (Median)***, berechne das arithmetische Mittel, den Modalwert und die mittlere Abweichung! Wie groß ist die ***Spannweite*** (Maß der ***Streuung***)?

10. Für 5 Schüler sind die Klassenarbeitszensuren in einem Fach aufgelistet.

Name	Karl	Sabine	Torsten	Tina	Marion
Zensuren	3; 2; 5; 2; 2	3; 3, 3; 1; 2	5, 5; 2; 2; 1	2; 3; 2; 3; 2	6; 4; 3; 6; 4

a) Berechne das arithmetische Mittel und den Zentralwert. Für welche SchülerInnen ist der Zentralwert günstiger?
b) Gib je ein weiteres Beispiel für 5 Zensuren an, bei denen der Zentralwert größer, gleich bzw. kleiner als das arithmetische Mittel ist!

Mathematik Klasse 10	Stochastik **Übungsaufgaben zur Wiederholung**	**2**
Lösungen		

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ergebnismenge Ω
alle mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments, es kann mehr als eine sinnvolle Ergebnismenge geben.

Bsp.: Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel
Ω ={7; 8; 9; 10; Bube; Dame; König; Ass} oder
Ω ={Karo; Herz; Pik; Kreuz}

Wahrscheinlichkeit P
Grad von Möglichkeiten
Wahrscheinlichkeiten in der Mathematik sind Zahlen zwischen 0 und 1, wobei Null und Eins zulässige Werte sind.
Einem unmöglichen Ereignis wird die Wahrscheinlichkeit 0 zugewiesen, einem sicheren Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1.

Ereignisse E und Gegenereignisse $\overline{E}$
$E + \overline{E} = \Omega$
$1 - P(E) = P(\overline{E})$

Bsp.:
Werfen eines 6-seitigen Würfels
E = 1 oder 2
$\overline{E}$ = alle anderen möglichen Ergebnisse, also 3, 4, 5 und 6
P(E) = 1/3
$P(\overline{E}) = 1 - 1/3 = 2/3$

LAPLACE-Experiment
Es handelt sich dann um ein Laplace-Experiment, wenn alle möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind.
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis berechnet sich dann als
$P = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$

Bsp.:
Werfen eines 6-seitigen (idealen) Würfels $P(1) = \frac{1}{6}$

Einstufiges Experiment / Mehrstufiges Experiment
Bei einem Zufallsexperiment gibt es nacheinander zu betrachtende Stufen.

<u>Bsp.:</u>
Einstufig: einmaliges Werfen eines Würfels
Mehrstufig: mehrmaliges Werfen eines Würfels / Werfen mehrerer Würfel

Baumdiagramm / Pfadregel
In einem Baumdiagramm werden die Stufen eines Zufallsexperiments mit ihren möglichen Ausgängen betrachtet. An die Pfade werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten geschrieben.
Nach der Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multipliziert.

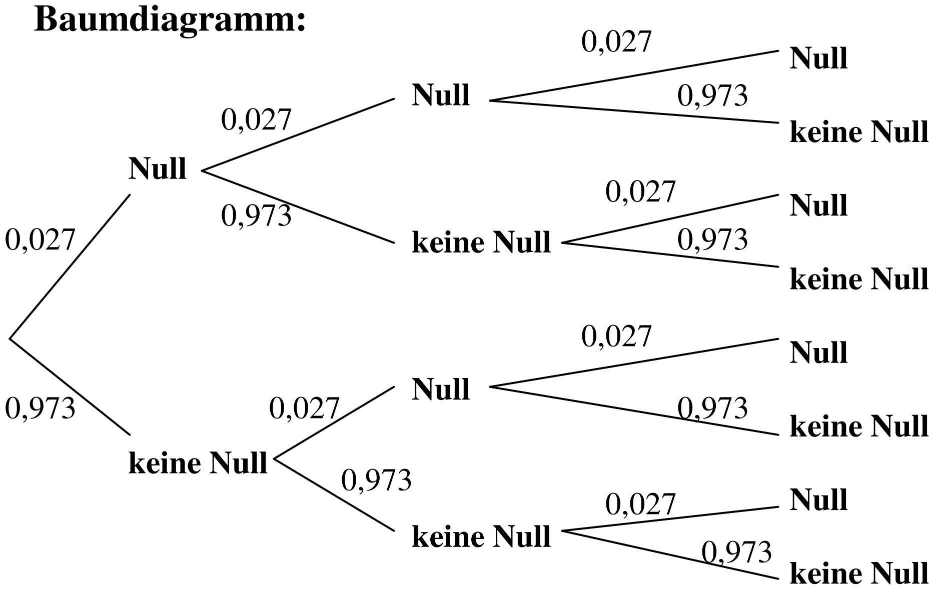
<u>Bsp.:</u>
Ein Roulette-Rad wird dreimal gedreht. Es wird betrachtet ob eine Null fällt oder nicht.

Zur Lösung der Aufgabe muss man sich zunächst klarmachen, dass es 37 Felder auf einem Roulette-Rad gibt: die Zahlen von 1 – 36 und die Null

Also ist P(Null) = $\frac{1}{37}$ = 0,027 (Laplace)

und P(keine Null) = $\frac{36}{37}$ = 0,973 (Gegenereignis)

Baumdiagramm:



P(NNN) =0,00002
P(NNK) =0,00071
P(NKN) =0,00071
P(NKK) =0,02556
P(KNN) =0,00071
P(K NK) =0,02556
P(KKN) =0,00026
P(KKK) =0,92117

Ziehen mit/ohne Zurücklegen
Bsp.:
Urne mit 2 weißen und 2 schwarzen Kugel. Es werden nacheinander zwei Kugel gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide weiß sind.

Mit Zurücklegen: P(ww) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Ohne Zurücklegen: P(ww) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Mathematik Klasse 10	Stochastik **Übungsaufgaben zur Wiederholung**	**2**

Lösungen

Statistik

absoluten Häufigkeiten H_n / relative Häufigkeiten h_n
Der Begriff absolute Häufigkeit ist gleichbedeutend mit dem umgangssprachlichen Begriff Anzahl. Die absolute Häufigkeit ist das Ergebnis einer einfachen Zählung der Ereignissen. Sie gibt an, wie viele Elemente mit dem gleichen interessierenden Merkmal gezählt wurden.
Die relative Häufigkeit gibt den Anteil der Elemente einer Menge wieder, bei denen eine bestimmte Merkmalsausprägung vorliegt. Sie wird berechnet, indem die absolute Häufigkeit eines Ereignisses durch die Gesamtanzahl n der möglichen Ereignisse in dieser Menge geteilt wird. Die relative Häufigkeit ist also eine Bruchzahl und hat einen Wert zwischen 0 und 1.

<u>Bsp.:</u>
In einer Umfrage werden 453 Personen nach ihrem Alter befragt. Bei der Auszählung stellt man fest, dass 197 Personen in die Klasse "von 20 Jahre bis unter 30 Jahre" fallen.
$H_{20\text{-}30} = 197$
$h_{20\text{-}30} = \frac{H_{20-30}}{n} = \frac{197}{453} \approx 0{,}43$

Mittelwert / arithmetisches Mittel $\bar{x}$ - der Durchschnitt
Modalwert (oder Modus) - der häufigste Wert in einer Liste
Median - der mittlere Wert in einer geordneten Liste
Spannweite R (oder Variationsbreite) - die Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert einer Datenreihe
mittlere Abweichung $\bar{s}$ – Der Durchschnitt der Abweichung vom arithmetischen Mittel

<u>Bsp.:</u>
Größe der Kinder der Klasse 8d:
1,34; 1,36; 1,36; 1,37; 1,38; 1,39; 1,39; 1,42; 1,44; 1,44; 1,44 1,45; 1,46; 1,49

Modalwert

Median

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl}} = \frac{19{,}73}{14} \approx 1{,}41$

Spannweite: $R = x_{max} - x_{min} = 1{,}49 - 1{,}34 = 0{,}15$

mittlere Abweichung: $\bar{s} = \frac{\text{Summe aller Abweichungen von } \bar{x}}{\text{Anzahl}} = \frac{0{,}55}{14} \approx 0{,}04$

Ein Mensch, der von Statistik hört,
denkt dabei nur an Mittelwert.
Er glaubt nicht dran und ist dagegen,
ein Beispiel soll es gleich belegen:

Ein Jäger auf der Entenjagd
hat einen ersten Schuß gewagt.
Der Schuß, zu hastig aus dem Rohr,
lag eine gute Handbreit' vor.

Der zweite Schuß mit lautem Krach
lag eine gute Handbreit' nach.
Der Jäger spricht ganz unbeschwert
voll Glauben an den Mittelwert:
Statistisch ist die Ente tot!

Doch wär er klug und nähme Schrot
- dies sei gesagt ihn zu belehren -
er würde seine Chancen mehren:
Der Schuß geht ab, die Ente stürzt,
weil Streuung ihr das Leben kürzt!

P.H. List
Professor für Pharmazeutische Technologie
Marburg a.d. Lahn

Mathematik Klasse 10	Stochastik **Übungsaufgaben zur Wiederholung**	**10**

1. In einer Urne befinden sich eine gelbe, zwei rote und drei blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen, ohne die zuerst gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen.

a) Zeichne zu dem vorliegenden Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und gib die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade an.
b) Bestimme die Ergebnismenge.
c) Gib ein Beispiel für ein sicheres Ereignis an und bestimme dessen Wahrscheinlichkeit.
d) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(1) P (2 gleiche Farben)
(2) P (2 verschiedene Farben)
(3) P (mind. eine rote Kugel)
(4) P (genau eine rote Kugel)
e) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse (1) und (2) unter der Voraussetzung, dass die zuerst gezogene Kugel vor dem zweiten Ziehen in die Urne zurückgelegt wird.

2. Bei einer Umfrage unter Zehntklässlern dazu, wie viel Zeit pro Woche sie durchschnittlich vor dem Computer verbringen, ergaben sich folgende Ergebnisse:

Zeit in h	0,5	1	2	5	10	15
Anzahl	2	3	10	8	7	5

a) Bestimme die absolute und relative Häufigkeit aller Ergebnisse!
b) Gib den Modalwert und den Zentralwert an!
c) Berechne den Mittelwert und die mittlere lineare Abweichung!

3. Die Herstellung eines komplizierten Maschinenteils geschieht in fünf voneinander unabhängigen Produktionsschritten. Beim ersten und zweiten Produktionsschritt beträgt die Fehlerquote jeweils 2%, beim dritten Produktionsschritt 4% und bei den beiden letzten Produktionsschritten jeweils 3%.

a) Nach dem fünften Produktionsschritt wird ein Maschinenteil nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Maschinenteil fehlerfrei ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach dem dritten Produktionsschritt zufällig ausgewähltes Maschinenteil fehlerhaft ist?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulette-Spiel die Null

a) beim ersten Drehen kommt?
b) spätestens beim dritten Drehen kommt?
c) frühestens beim dritten Drehen kommt?

5. Bei der Produktion von Porzellangefäßen sind erfahrungsgemäß 25% der Gefäße wegen schlechter Form, 15% wegen unsauberer Farbe und 20% wegen ungleichmäßiger Oberfläche nicht I. Wahl. Ein Porzellangefäß ist II. Wahl, wenn es genau eine dieser Kontrollen nicht besteht; der Rest ist Ausschlussware.

a) In welcher Reihenfolge werden die Kontrollen am besten durchgeführt?
b) Wie groß ist der Anteil an Gefäßen I. bzw. II. Wahl?

6. Bei einer Verkehrszählung wurde an einer Kontrollstelle festgestellt, dass 20 % der vorüberfahrenden Fahrzeuge LKW waren, 60% PKW, 15%Mopeds und Mofas und 5% sonstige Fahrzeuge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter drei vorbeifahrenden Fahrzeugen

a) drei Mopeds oder Mofas,
b) drei PKW
c) zwei PKW und ein LKW,
d) ein LKW, ein PKW und ein Moped sind?

Lösung Aufgabe 3

Die Herstellung eines komplizierten Maschinenteils geschieht in fünf voneinander unabhängigen Produktionsschritten. Beim ersten und zweiten Produktionsschritt beträgt die Fehlerquote jeweils 2%, beim dritten Produktionsschritt 4% und bei den beiden letzten Produktionsschritten jeweils 3%.

a) Nach dem fünften Produktionsschritt wird ein Maschinenteil nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Maschinenteil fehlerfrei ist?

h – heile, fehlerfrei **d – defekt, fehlerhaft**
Gesucht ist also: P(hhhhh)

Es ist sinnvoll im Baumdiagramm nur die benötigten Zweige zu zeichnen.
Die Wahrscheinlichkeit für h ergibt sich aus 1 – P(d), also im ersten Fall als 1 – 0,02

h	**h**	**h**	**h**	**h**
0.98	0.98	0.96	0.97	0.98
1. Schritt	2. Schritt	3. Schritt	4. Schritt	5. Schritt

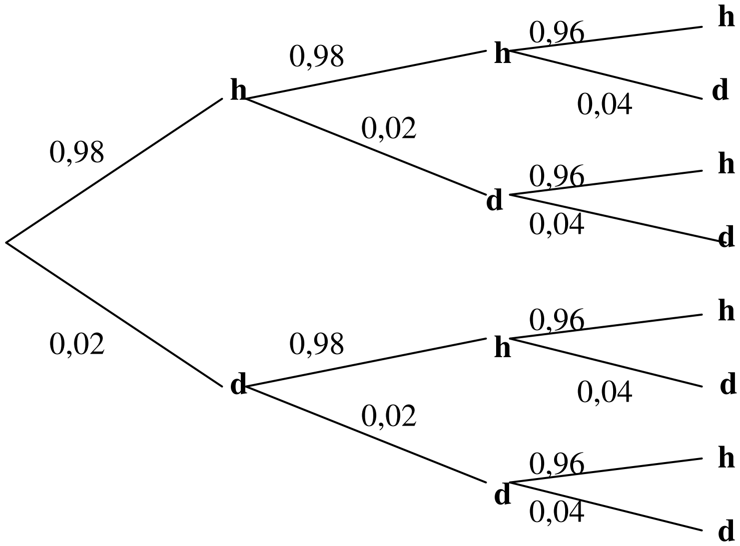
→ P (hhhhh) = 0,98 * 0,98 * 0,96 * 0,97 * 0,97 = 0,87

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach dem dritten Produktionsschritt zufällig ausgewähltes Maschinenteil fehlerhaft ist?

Gesucht ist also: P(Teil nach dem 3. Schritt fehlerhaft) = P (hhd) + P (hdh)
+ P (hdd) + P(dhh) + P(dhd) + P(ddh) + P(ddd)

Einfachster Weg ist hier sich zu überlagen, dass ein Teil genau dann defekt ist, wenn es nicht heile ist, also
P(Teil nach dem 3. Schritt fehlerhaft) = 1 – P(Teil nach dem 3. Schritt fehlerfrei)
= 1 – P(hhh)
= 1 – 0,98 * 0,98 * 0,96
= 1 – 0,92 = *0,08*

anderer Weg
gleiches Ergebnis



P(hhh) = 0,92
P(hhd) = 0,038
P(hdh) = 0,019
P(hdd) = 0,001
P(dhh) = 0,019
P(dhd) = 0,001
P(ddh) = 0,00004
P(ddd) = 0,00002

P(Teil nach dem 3. Schritt fehlerhaft) = P (hhd) + P (hdh) + P (hdd) + P(dhh)
+ P(dhd) + P(ddh) + P(ddd)
= 0,038 + 0,019 + 0,001 + 0,019 + 0,001 + 0,00004 + 0,00002 = *0,08*

Lösung Aufgabe 4

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulette-Spiel die Null

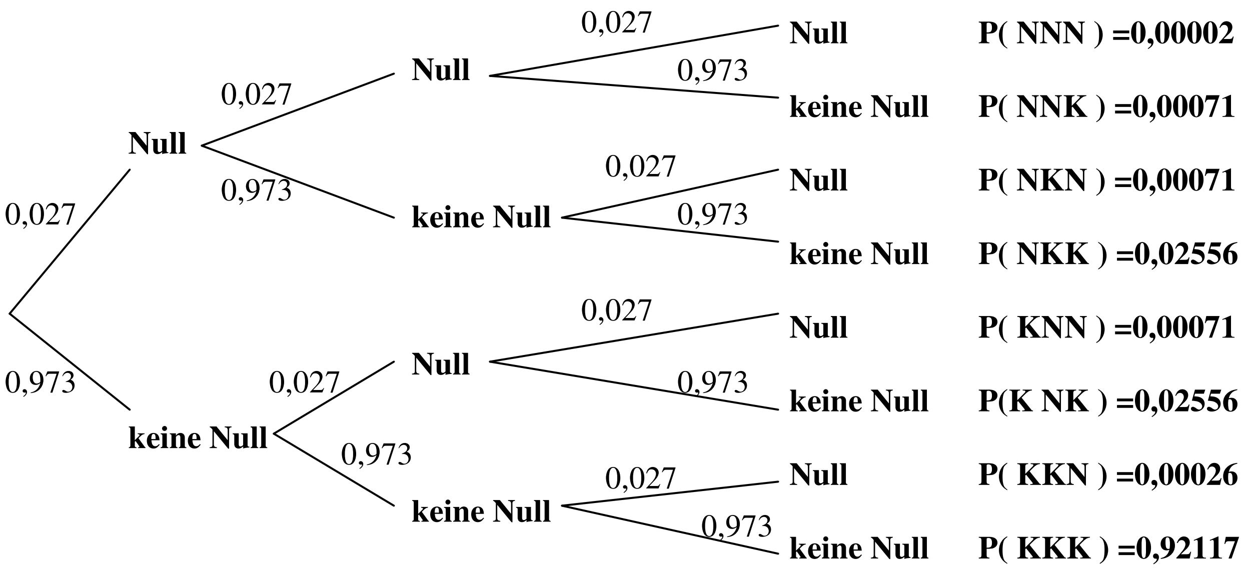
d) beim ersten Drehen kommt?
e) spätestens beim dritten Drehen kommt?
f) frühestens beim dritten Drehen kommt?

Zur Lösung der Aufgabe muss man sich zunächst klarmachen wie viele Felder es auf einem Roulette-Rad gibt.

Richtige Antwort: 37
(die Zahlen von 1 – 36 und die Null)

Also ist P(Null) = $\frac{1}{37}$ **= 0,027**

und P(keine Null) = $\frac{36}{37}$ **= 0,973**



a) **P(Null beim ersten Drehen) = P(N) = 0,027**

b) **P(Null spätestens beim dritten Drehen) = 1 – P(keine Null bis zum dritten Drehen)**
= 1 – P(KKK)
= 1 – 0,92117
= 0,07883

c) **P(Null frühestens beim dritten Drehen) = P(keine Null bis zum dritten Drehen)**
= P(KK) = 0,973 * 0,973 = 0,95

Lösung Aufgabe 5

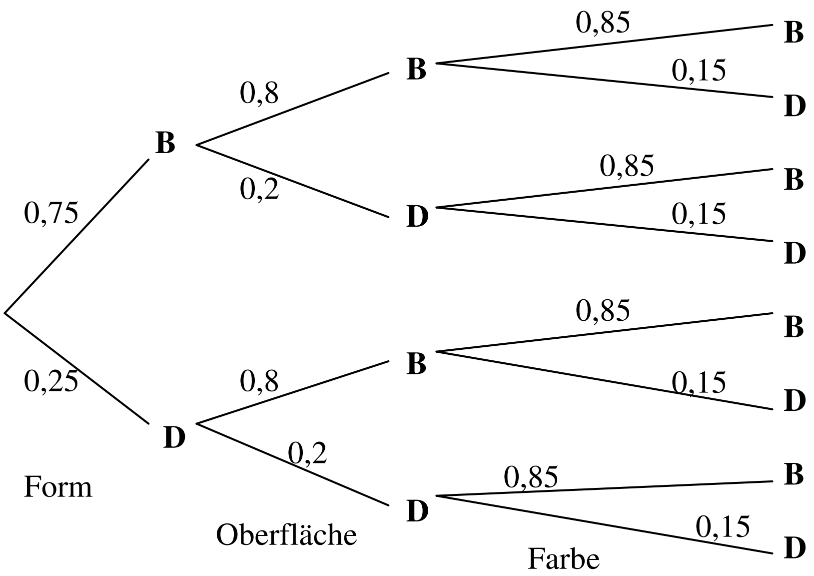
Bei der Produktion von Porzellangefäßen sind erfahrungsgemäß 25% der Gefäße wegen schlechter Form, 15% wegen unsauberer Farbe und 20% wegen ungleichmäßiger Oberfläche nicht I. Wahl. Ein Porzellangefäß ist II. Wahl, wenn es genau eine dieser Kontrollen nicht besteht; der Rest ist Ausschlussware.

c) In welcher Reihenfolge werden die Kontrollen am besten durchgeführt?

Es ist sinnvoll zuerst die Kontrollen durchzuführen, die die meisten Gefäße aussortieren, damit man möglichst wenig Gefäße kontrollieren muss, d.h. es sollte zuerst auf Form, dann auf Oberfläche und zuletzt auf Farbe kontrolliert werden.

d) Wie groß ist der Anteil an Gefäßen I. bzw. II. Wahl?

B – Test bestanden   D – Test durchgefallen



P(BBB) = 0,51
P(BBD) = 0,09
P(BDB) = 0,1275
P(BDD) = 0,0225
P(DBB) = 0,17
P(DBD) = 0,03
P(DDB) = 0,0425
P(DDD) = 0,0075

P(I. Wahl) = P(BBB) = 0,51
P(II. Wahl) = P (BBD) + P(BDB) + P(DBB)
= 0,09 + 0,1275 + 0,17
= 0,3875

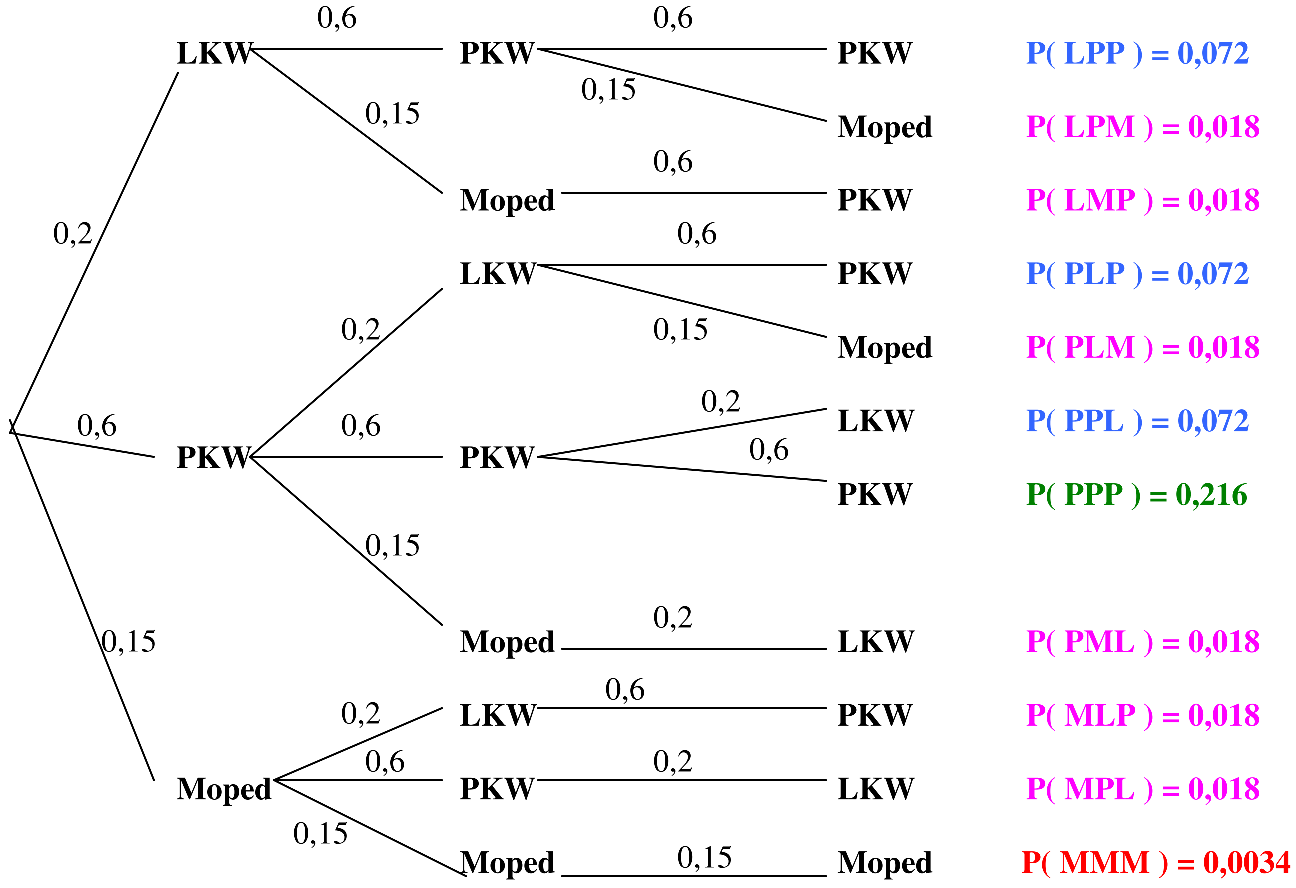
Es sind durchschnittlich 51% der Gefäße I. Wahl, 39% II. Wahl und damit 10% Ausschuss.

Lösung Strick Aufgabe 6

Bei einer Verkehrszählung wurde an einer Kontrollstelle festgestellt, dass 20 % der vorüberfahrenden Fahrzeuge LKW waren, 60% PKW, 15%Mopeds und Mofas und 5% sonstige Fahrzeuge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter drei vorbeifahrenden Fahrzeugen

a) drei Mopeds oder Mofas,
b) drei PKW
c) zwei PKW und ein LKW,
d) ein LKW, ein PKW und ein Moped sind?

Es ist sinnvoll im Baumdiagramm nur die benötigten Zweige zu zeichnen.



a) **P(MMM) = 0,0034**
b) **P(PPP) = 0,216**
c) **P(zwei PKW und ein LKW) = P(LPP) + P(PLP) + P(PPL)**
= 0,072 + 0,072 + 0,072
= 0,216
d) **P(ein PKW, ein LKW und ein Moped) = P(LPM) + P(LMP) + P(PLM)**
+ P(PML) + P(MLP) + P(MPL)
= 6 * 0,018
= 0,108