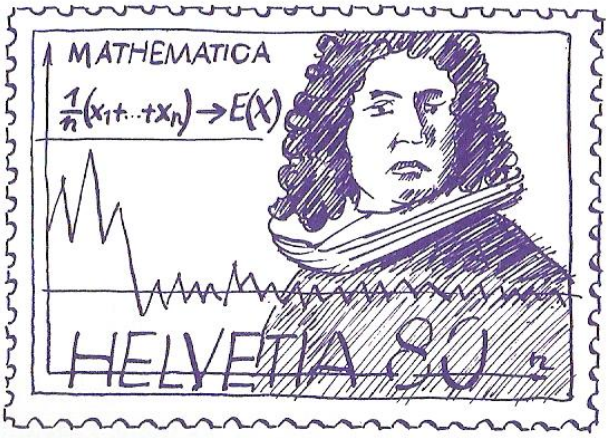
Mathematik Klasse 10	**Stochastik** **Bernoulli-Experimente**	**11**

Jakob Bernoulli lebte im 17. Jahrhundert. Er studierte Theologie und heimlich Mathematik. Sein Werk „Ars conjectandi" enthält Grundlagen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu den bernoullischen Zahlen und zum Gesetz der großen Zahlen.



Jakob Bernoulli beschäftigte sich intensiv mit Zufallsexperimenten, die nur zwei Ergebnisse liefern, beispielsweise Treffer oder Niete, und die sich beliebig oft wiederholen lassen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bleibt bei jedem Einzelversuch also unverändert. Diese Experimente tragen heute seinen Namen.

Wird ein Bernoulli-Experiment n-fach nacheinander ausgeführt, sprechen wir von einer **Bernoulli-Kette** der Länge **n**.

Bei einer Tombola gewinnt jedes 4. Los. Wir gehen davon aus, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeit durch das Herausziehen von Losen nicht verändert → Es handelt sich beim Ziehen eines Loses um ein Bernoulli-Experiment.

1. Bestimme die Wahrscheinlichkeit p zu gewinnen und die Gegenwahrscheinlichkeit q zu verlieren.

Es werden 5 Lose gezogen.

2. Entscheide, ob es sich um eine Bernoulli-Kette handelt und bestimme n.
3. Zeichne zu dem Zufallsversuch das Baumdiagramm und bestimme die Ergebnismenge.

Es wird eine Zufallsgröße X definiert mit X: Anzahl Gewinne.

4. Entscheide, welche Werte k X annehmen kann.
5. Bestimme für X die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Es werden nun 10 Lose gezogen. Es soll auch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bestimmt werden. Da das Baumdiagramm für diesen Zufallsversuch sehr aufwendig wäre, stellt sich die Frage, ob sich die Wahrscheinlichkeiten auch einfacher bestimmen lassen…

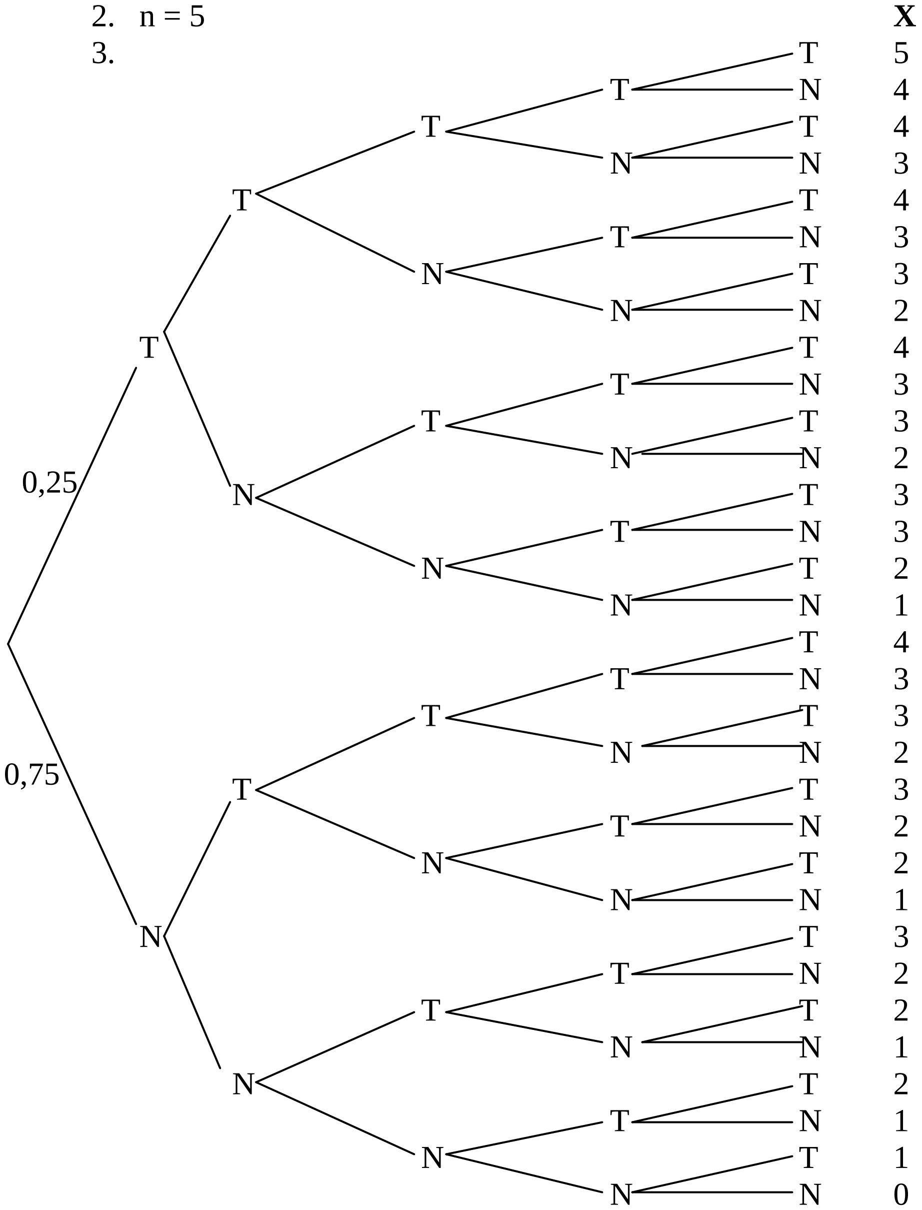
Überlegungen zur Rechnung bei 5 Losen:

- Es fällt auf, dass jeder Pfad mit z.B. 3 Gewinnen die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.
- Wie ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad bei n=10 mit 4 Gewinnen und 6 Nieten?
- Gibt es eine Möglichkeit die Anzahl der Pfade zu bestimmen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es 4 (k) Gewinne bei 10 (n) Losen anzuordnen?

Mathematik Klasse 10	Stochastik **Bernoulli-Experimente**	**11**

Lösung

1. $p = 0{,}25$ $\quad q = 1 - p = 0{,}75$
2. $n = 5$
3.



4. $k = 0,1,2,3,4,5$
5. $P(X=5) = 0{,}25^5 = \frac{1}{1024} \approx 0{,}00098$

   $P(X=4) = 5 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 = \frac{15}{1024} \approx 0{,}015$

   $P(X=3) = 10 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 = \frac{45}{512} \approx 0{,}088$

   $P(X=2) = 10 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 = \frac{135}{512} \approx 0{,}26$

   $P(X=1) = 5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^4 = \frac{405}{1024} \approx 0{,}40$

   $P(X=0) = 0{,}75^5 = \frac{243}{1024} \approx 0{,}24$

Erarbeitung der Formel an der Tafel:
mit Hilfe der Zettel die Formel zusammenbauen.

Tafelbild	**Definition:** Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** (B(n;p)-verteilt), wenn gilt k = 0; 1; 2; 3; ...; n und für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Hinweis auf Tafelwerk!

Tafelbild	**Aufgabe:** 1. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für n= 10 mit Hilfe der Formel. 2. Berechne E(X) für n = 5 und n = 10. 3. Suche aus dem Tafelwerk die Formel für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße und überprüfe deine Ergebnisse.

$P(X=10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^{0} = \frac{1}{1048576} \approx 0{,}00000095$

$P(X=9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}25^{9} \cdot 0{,}75^{1} = \frac{15}{524288} \approx 0{,}000029$

$P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}25^{8} \cdot 0{,}75^{2} \approx 0{,}00039$

$P(X=7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}25^{7} \cdot 0{,}75^{3} = \frac{405}{131072} \approx 0{,}0031$

$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}25^{6} \cdot 0{,}75^{4} \approx 0{,}016$

$P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}25^{5} \cdot 0{,}75^{5} \approx 0{,}058$

$P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}25^{4} \cdot 0{,}75^{6} \approx 0{,}15$

$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}25^{3} \cdot 0{,}75^{7} \approx 0{,}25$

$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}25^{2} \cdot 0{,}75^{8} \approx 0{,}28$

$P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^{1} \cdot 0{,}75^{9} \approx 0{,}19$

$P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^{0} \cdot 0{,}75^{10} \approx 0{,}056$

n = 5 E(X) = n = 10 E(X) =

Tafelbild	**Definition:** Erwartungswert einer Binomialverteilung mit n Versuchen und der Erfolgswahrscheinlichkeit p: **E(X) = np**